南京理工大学

2019 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：616　科目名称：数学分析　　　　满分：150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、（15 分）求下列极限：

（1）　$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$；

（2）　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$.

二、（15 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，开区间 $(0,1)$ 内可导，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)f(1-\xi)=f(\xi)f'(1-\xi)$.

三、（15 分）

（1）设三元函数 $u=xyze^{x+y+z}$，求 $\frac{\partial^k u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$，其中 $p+q+r=k$；

（2）求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2019^n}x^{2n}$ 的收敛域及其和函数.

四、（15 分）证明：如果二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，那么 $f(x,y)$ 在这点处沿方向 $\bar{e}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in\mathbf{R}$ 的方向导数都存在.

五、（15 分）计算 $\iiint\limits_{\Omega}z^2dxdydz$，$\Omega$ 是上半椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$，$z\ge 0$.

六、（15 分）计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S}(2x+z)dydz+zdxdy$，其中 S 为有向曲面 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$，其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

七、（15 分）计算 $I=\oint_L\frac{xdy-ydx}{3x^2+4y^2}$，其中 L 是椭圆 $2x^2+3y^2=1$，方向沿逆

时针方向.

八、（15 分）求 $I=\int_0^1\frac{x^a-x^b}{\ln x}dx\ (a>b>0)$.

九、（15 分）设 $f'(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx.$$

十、（15 分）利用区间套定理证明：实轴上任一有界无限点集 S 至少有一个聚点.