

2021 年硕士学位研究生入学考试试题

科目代码: 616

科目名称: 数学分析

满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一 (15 分)

(1) 用数列极限“ $\varepsilon-N$ ”定义证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n + \sin(n^2)} = \frac{1}{3}$.

(2) 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 3x}-1}{x} = 9$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 值.

二 (15 分) 求函数 $z = x^2 - xy + y^2$ 在区域 $|x| + |y| \leq 1$ 上的最大值和最小值.

三 (15 分) 试确定实数 α 的范围, 使函数

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^\alpha \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

在 $(0, 0)$ 处可微.

四 (15 分)

(1) 已知 $\int f(x) dx = x \arctan x + C$, 求 $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx$.

(2) 计算广义积分 $I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2x}(\sin 7x - \sin 5x)}{x} dx$.

五 (15 分)

(1) 讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 在区间 $0 \leq x < +\infty$ 上的一致收敛性, 并给予证明.

(2) 证明 $f(x) = \sin(x^2)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上不一致连续.

六 (15 分)

(1) 计算曲线积分 $\oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, 其中 C 为正向曲线 $|x| + |y| = 1$.

(2) 设 Σ 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ($z \geq 0$) 的外侧, 求

$$\iint_{\Sigma} xz^2 dydz + yz^2 dzdx + 2z(x^2 + y^2) dxdy.$$

七 (15 分) 将周期为 2π 的函数 $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$ 展开成 Fourier 级数, 并

求下列级数的和: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2}$.

八 (15 分) 设 $f(x), g(x)$ 在有限区间 (a, b) 内一致连续, 用“ $\varepsilon-\delta$ ”定义证明: $f(x)g(x)$ 在 (a, b) 内也一致连续.

九 (15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内二阶可导, 且 $f''(x) > 1$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$. 证

明: $f(x) \geq 2x + \frac{x^2}{2}$.

十 (15 分) 求曲面 $\Sigma: (x^2 + y^2 + z^2)^3 = 6xyz$ 所围空间区域的体积 V_{Σ} .